

(問題)

$\triangle ABC$ の各辺の長さは2よりも大きいものとする。

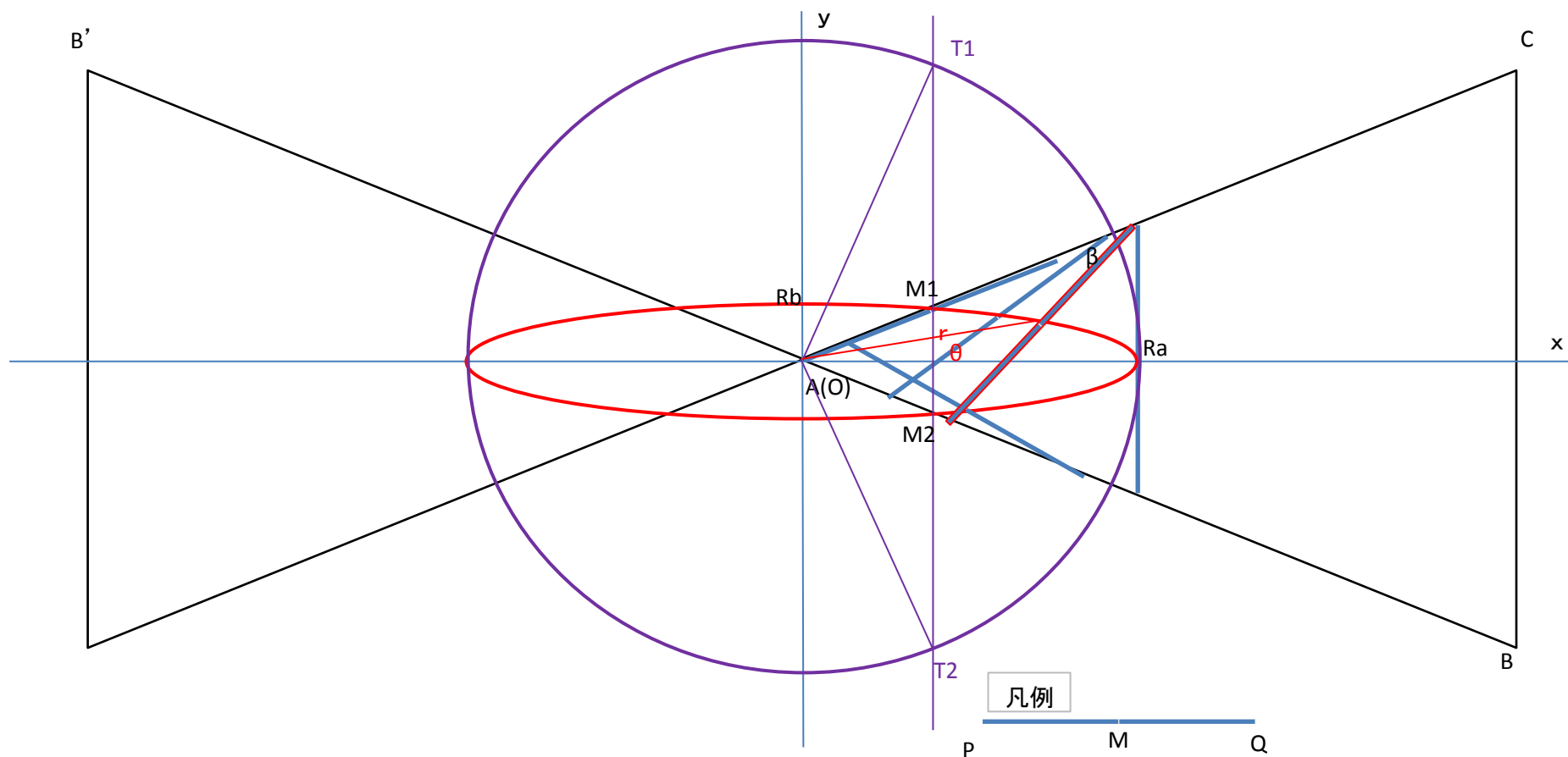
この三角形の周上に2点をおく長さ2の線分PQが周上を

1周するとき、PQの中点Mの軌跡と、 $\triangle ABC$ の周とで囲まれる部分の面積を求めよ。

PQの中点Mの軌跡と、 $\triangle ABC$ の周とで囲まれる部分はPQがともに $\triangle ABC$ の同一辺上にある場合は

Mも $\triangle ABC$ の辺上にあるので求める面積に寄与しません。

したがって、PとQが異なった辺に存在するときのMの軌跡を考えます。



まず、△ABCにおいて∠Aの2等分線を取り、これをx軸とします
次にAを通り、x軸に垂直な直線をy軸とします。
ここで、原点はAですが、慣例に従いOと表現することとします(A=O)

線分PQのPがAに一致しているときのMの位置をM1とします
線分PQのQがAに一致しているときのMの位置をM2とします
線分PQがx軸に垂直ときのMの位置をRaとします
∠MQO=β とします

計算の便宜上極座標表示を考えます

$$r=OM$$

$$\angle MORa=\theta$$

とすると、正弦定理から

$$r \cdot \sin(A/2 - \theta) = \sin \beta$$

$$r \cdot \sin(A/2 + \theta) = \sin(A + \beta)$$

上記2式から、β を消去し整理すると

$$r^2 = (\sin A/2 \cos A/2)^2 / (\sin^4 A/2 + (1 - 2\sin^2 A/2) \sin^2 \theta)$$

これを変形し楕円の極座標表示の標準形($r = a/(b - e \cos \theta)$)にすることができなかったので直交座標に変形してみました

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

を代入整理すると

$$x^2 / \cot^2(A/2) + y^2 / \tan^2(A/2) = 1$$

(Aが鋭角の場合cot(A/2)が長半径tan(A/2)が短半径)

となり楕円であることが確認できます(0<A<π (B、Cも同様)であることから)

次に、楕円扇OM1M2の面積を考えます

いま円 $x^2 / \cot^2(A/2) + y^2 / \cot^2(A/2) = 1$ (図では紫の円で半径cot(A/2))を考えると

楕円(円)は、円(楕円)の互いにy座標のみ変化する写像なので

図で楕円→円の写像を考えると

$$\text{楕円のy座標} \rightarrow \text{円のy座標} \times \tan^2(A/2)$$

$$\text{円のy座標} \rightarrow \text{楕円のy座標} \times \cot^2(A/2)$$

楕円扇OM1M2は円扇OT1T2へ射影され

その円における面積は

$$\text{半径} \cot(A/2) \cdot \angle T1OT2 = \cot(A/2) \cdot (\pi - A)$$

$$\angle T1OT2 = 2 \arccos(\cos(A/2) / \cot(A/2)) = 2 \arccos(\sin(A/2)) = 2(\pi/2 - A/2) = \pi - A$$

よってAにおける楕円扇の面積は

$$\cot(A/2) \cdot (\pi - A) \cdot \tan^2(A/2) = (\pi - A) \cdot \tan(A/2)$$

三角形の3頂角で同様に成り立つので

$$(\pi - A) \cdot \tan(A/2) + (\pi - B) \cdot \tan(B/2) + (\pi - C) \cdot \tan(C/2) \dots \text{回答}$$

ここで $A+B+C=\pi$ からさらに変形できそうなのでやってみましたが
複雑になるばかりで力が及びませんでした。