

8. せっけん膜に聞いてみよう

— 問題 —

(1) 図1のような1辺の長さ1 kmの正三角形の3頂点の位置に3軒の家があります。この3点をつないで長さの合計が最小になるように電話線を引きたいのです。

どのように、この3点を線分で結んだらよいでしょうか？

(2) 図2のような1辺の長さ1 kmの正方形の4頂点の位置にある4軒の家だったら、この4点をどのようにつなげば電話線の長さの合計が最小になるでしょうか？

(3) 図3のような正五角形5頂点の位置にある1辺の長さ1 kmの5点だったら、図4のような正六角形の6頂点の位置にある1辺の長さ1 kmの6点だったら、どのように点をつなげば、電話線の長さの合計は最小になるでしょうか？

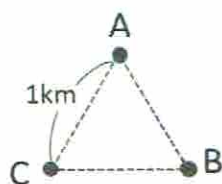


図1

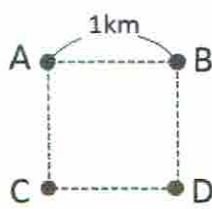


図2

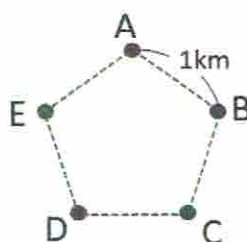


図3

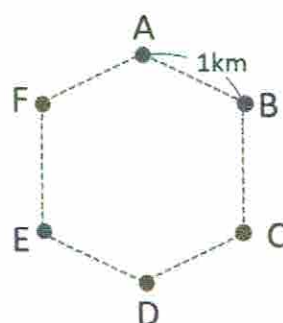


図4

— 解説 —

(1) 図5(a)のように3点を結ぶと、電話線の長さの合計は $1(\text{km}) \times 2 = 2(\text{km})$ です。

図5(b)のように、3点A、B、Cから等距離にある点Xを中継に3点を結ぶと(図5(b)の赤い3本の線分)、長さの合計は約 $0.577 \times 3 = 1.73 \text{ km}$ (正確には $\sqrt{3} \text{ km}$)になり、実はこれが最小の結び方です。

※ちなみに、 $\sqrt{3}$ (ルート3と呼びます) kmという長さは図6(a)のように1辺の長さ1 kmの直角二等辺三角形の斜辺に乗っかる高さ1 kmの直角三角形の斜辺の長さです。

そして、図6(a)の直角三角形の斜辺の上に、さらに同じように、さらに乗せた高さ1の直角三角形の斜辺の長さは2 kmになります。このことから $\sqrt{3}$ が2より小さいことは確認できますね。

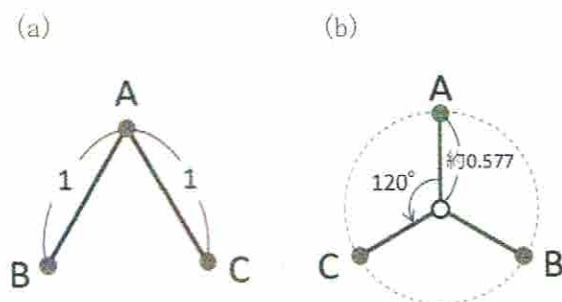


図5

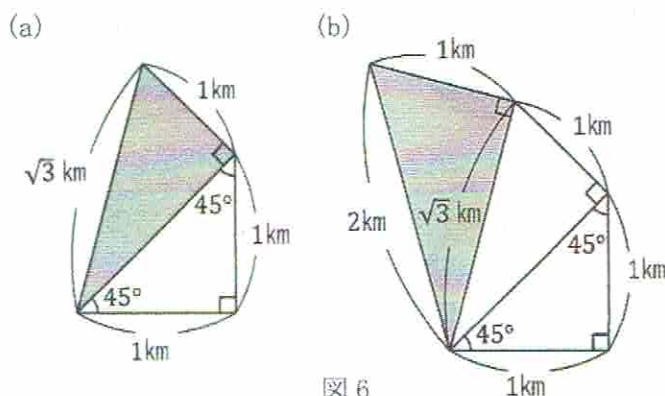


図6

(2) 1辺の長さ1 kmの正方形の4頂点の位置A、B、C、Dを結ぶ場合はどうでしょうか？

図7(a)のように“コ”の字型に結ぶと総距離は3 kmになります。図7(b)のように“X”型に結ぶと、総距離は約 $1.41 \times 2 = 2.82$ km（正確には $2\sqrt{2}$ km）になります。

図7(b)が一見、最小のように思えますが、四苦八苦しながら計算してみると、図7(c)のように新たに黒点を2点追加して（点Xと点Yとします）4点をつなぐと総距離は、約 $0.578 \times 4 + 0.422 = 2.73$ km（正確には、 $1 + \sqrt{3}$ km）となり、実はこれが最小なのです。図7(c)の線のつながりかたでは、交点をもつ2本の線分も 120° の角度になるように線が結ばれています（図7(d)）。

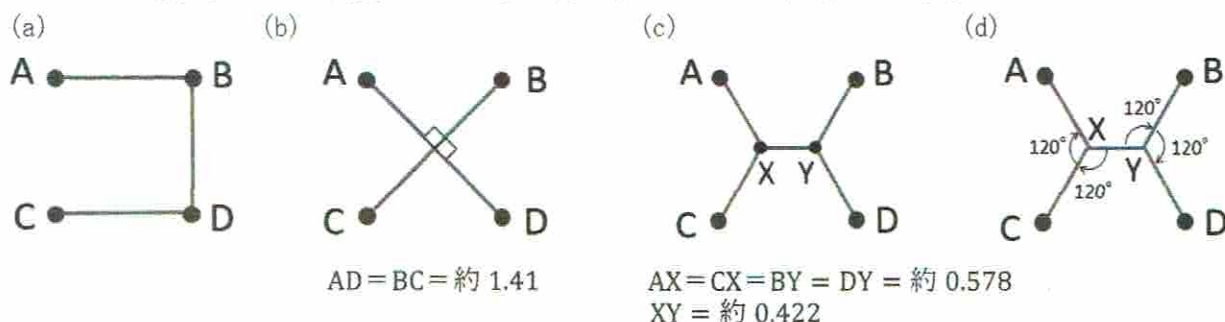


図 7

(3) 4個よりさらに点の個数が増えて、正五角形、正六角形の頂点上の5点、6点に対して最小の結び方を求めるのは大変です。方程式を立てて計算で求めようとすると、大変な作業になります。

ところが、これらの問題について、せっけん水の力を借りると、一瞬のもとに、正解を教えてくれるのです。せっけん水が活躍する驚くべき実験を紹介しましょう。

せっけん膜実験

図8(a)のように、2枚のプラスチックの板を重ね合わせ、正3角形の3個の頂点の位置に3個のロッドを取り付けます（図8(b)）。次に、この装置をせっけん水の中に浸し（図8(c)）、ゆっくりと装置をせっけん水の中から引き上げます。コツは、せっけん水を泡立てないように作業することです。すると、せっけん水は2枚の板の間で、3本のロッドを柱にしてせっけん膜を張ります。このとき、せっけん膜には表面張力が働き、表面張力の性質により、その表面積が最小になる形で膜を張るのです（図8(d), (e)）。

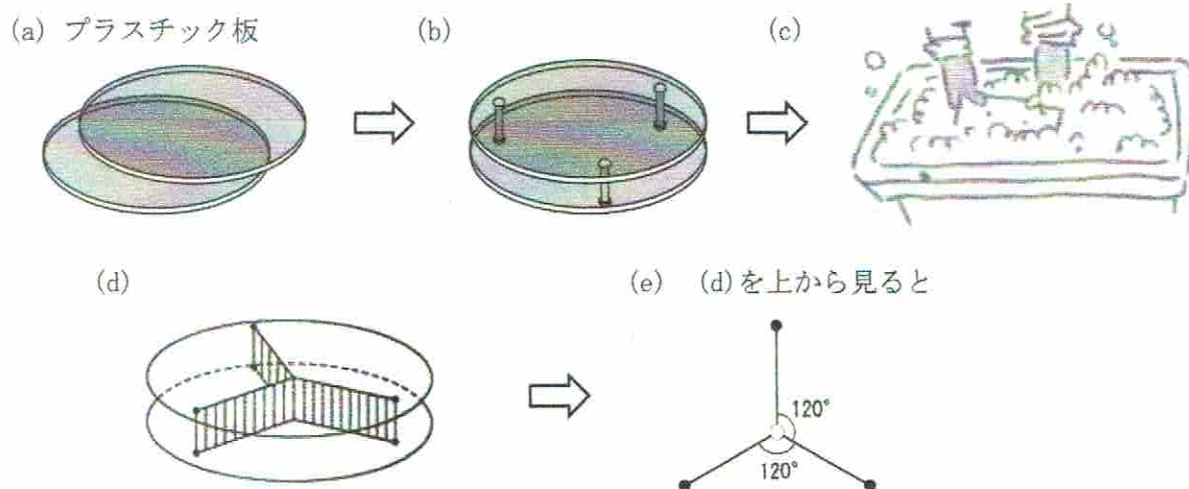


図 8

正三角形の頂点上の3点の場合と同じように、正方形、正五角形、正六角形の頂点の位置にある4点、5点、6点の場合についても、それぞれ、せっけん膜に答を尋ねてみましょう。

◇ 正方形上の4頂点の位置にある4点の場合 (図9)

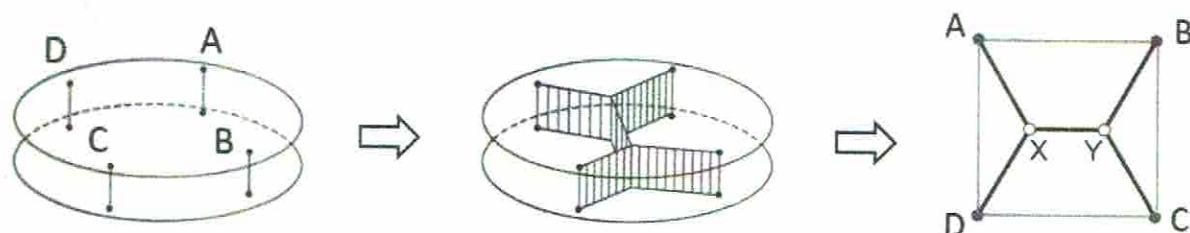


図9

◇ 正五角形上の5頂点の位置にある5点の場合 (図10)

この場合も、せっけん膜は、最小の長さの5点のむすび方が図10(c)のようになることを教えてくれます。

このとき、5点以外に、3点の中継点が現われることに注意して下さい。

そして、この中継点から出ている線分のどのペアも 120° の角度で交わっていることにも注目して下さい (図10(d))。

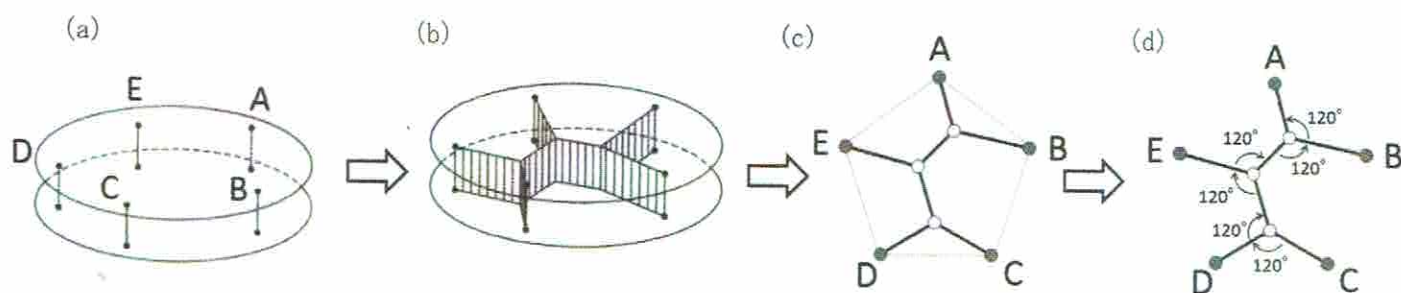


図10

さて、みなさん、正六角形の頂点の位置にある6点の場合は、最小の長さの結び方はどんな形になると思いますか？

「3点の場合は、中継点が1個」

「4点の場合は、中継点が2個」

「5点の場合は、中継点が3個」

だったから、「6点の場合は、中継点が……」。ところが、6点の場合について、せっけん膜に尋ねてみると、答が図11のようになることを教えてくれるのです。なんと、中継点の個数は0で、線分の長さの合計が5になるときが最小なのです。

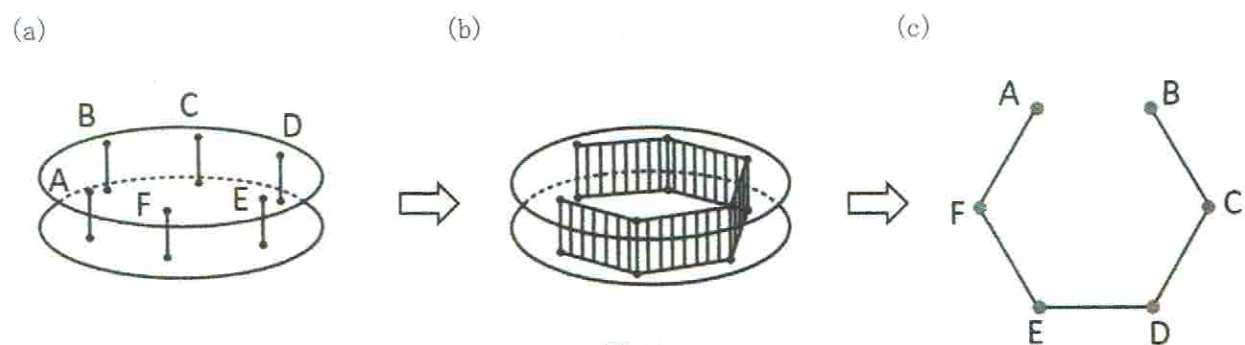


図 11

この装置をつくるのは簡単なので、ぜひつくって試してみてください。方程式を立ててコンピューターに解かせるより、う〜んと早く、せつけん膜が問題を解決することもあるのですから、自然の力は侮れないものです。